



# Konstrukcje sprężone

## Cz. 4. Stany graniczne użytkowości elementów sprężonych

tekst: **dr inż. PIOTR GWOŹDZIEWICZ**, Pracownia Konstrukcji Sprężonych, Instytut Materiałów i Konstrukcji Budowlanych, Politechnika Krakowska

Metoda stanów granicznych (SG) w postaci opisanej w normie Eurokod 2 (PN-EN 1992-1-1, [1]), poza omówioną wcześniej grupą stanów granicznych nośności elementów sprężonych („Nowoczesne Budownictwo Inżynieryjne” 2015, nr 1 [58], s. 64–69), wymaga od projektanta sformułowania, a następnie sprawdzenia warunków stanów granicznych użytkowości (SGU). Warunki te dotyczą cech użytkowych konstrukcji, jej trwałości, estetyki oraz sprawdzenia zgodności przyjętych założeń obliczeniowych z rzeczywistą pracą elementów.

### 1. Zasady podstawowe

Projektant ma za zadanie wykazać, że dla każdego ze stanów granicznych użytkowości zachodzi relacja:

$$E_d \leq C_d$$

gdzie  $E_d$  oznacza efekt oddziaływań (wartość naprężeń, wielkość ugięcia, moment rysujący lub szerokości rysy), a  $C_d$  – maksymalną akceptowalną wartość takiego efektu.

W zakres sprawdzania stanów granicznych użytkowości wchodzi następujące warunki:

- ograniczenie naprężeń,
- ograniczenie zarysowania,
- ograniczenie ugięć.

W zależności od indywidualnego przypadku można też stawiać inne wymagania, jak np. warunek ograniczenia drgań ze względu na wymagany komfort użytkownika lub wymagania techniczne

związane z zainstalowanymi urządzeniami.

Warunki SGU należy sprawdzać dla miarodajnych kombinacji oddziaływań. Rozróżnia się:

– kombinację charakterystyczną w postaci:

$$\sum_{j \geq 1} G_{k,j} + P + Q_{k,1} + \sum_{i > 1} \psi_{0,i} Q_{k,i}$$

– kombinację częstą:

$$\sum_{j \geq 1} G_{k,j} + P + \psi_{1,1} Q_{k,1} + \sum_{i > 1} \psi_{2,i} Q_{k,i}$$

– kombinację quasi-stałą:

$$\sum_{j \geq 1} G_{k,j} + P + \sum_{i \geq 1} \psi_{2,i} Q_{k,i}$$

Występujące we wzorach oznaczenia  $G$ ,  $P$  i  $Q$  oznaczają odpowiednio wartości obciążeń stałych, obciążenia sprężeniem i obciążeń zmiennych. Współczynniki  $\psi_0$ ,  $\psi_1$  i  $\psi_2$  pozwalają określić wartości reprezentatywne obciążeń, odpowiednio: kombinacyjną, częstą i quasi-stałą. Ich wartości podane są w tablicy 1.

W ramach opisu warunków dla poszczególnych weryfikacji warunków stanów granicznych użyteczności norma określa szczegółowo, jakie kombinacje obciążeń należy stosować odpowiednio.

## 2. Warunki ograniczenia naprężeń

Z zasady warunki ograniczające poziom naprężeń mogą pełnić w projektowaniu rolę warunków sprawdzających bezpieczeństwo elementu pod obciążeniem. Takie podejście obowiązywało w stosowanych w przeszłości metodach projektowania, w których weryfikacja bezpieczeństwa pracy elementu sprowadzała się do sprawdzenia poziomu wyężenia reprezentatywnego materiału. Obecnie takie podejście występuje w procedurach projektowania niektórych krajów. Metoda

stanów granicznych przypisuje obecnie warunkom weryfikacji naprężeń jedynie rolę weryfikacyjną, potwierdzającą spełnienie założeń wobec zastosowanego modelu zachowania konstrukcji.

Projektowanie konstrukcji z betonu, również zbrojonego i sprężonego, opiera się na szeregu założeń dotyczących pracy materiałów, przekrojów, a także całych elementów. Zasada zeszywnienia, zasada płaskich przekrojów i inne warunki są oparte na określonej koncepcji modelu pracy przekroju. Jednym z podstawowych niebezpieczeństw jest możliwość wystąpienia odkształceń materiałów wykraczających poza założony model pracy. Warunki ograniczenia naprężeń mają za zadanie sprawdzić, czy założenia dotyczące zakresu pracy materiałów w elemencie będą spełnione.

### 2.1. Ograniczenie naprężeń dla stali zbrojeniowej

Stal zbrojeniowa spełniająca wymagania przepisów normowych dla tego materiału cechuje się stabilnymi parametrami mechanicznymi. Sprawdzenie poziomu naprężeń dla stali zbrojeniowej należy wykonywać dla charakterystycznej kombinacji obciążeń. Maksymalne naprężenie w materiale wywołane obciążeniami nie może przekraczać poziomu  $0,80 \cdot f_{yk}$ , a wywołane oporem przeciwko odkształceniom wymuszonym –  $f_{yk}$ .

### 2.2. Ograniczenie naprężeń dla betonu

Zarówno charakterystyka betonu, jak i jego znacznie mniej jednorodne (niż w przypadku stali zbrojeniowej) cechy mechaniczne powodują, że ograniczenia naprężeń dla tego materiału są znacznie bardziej ostre. Przede wszystkim przyjmuje się, że dla charakterystycznej kombinacji obciążeń poziom naprężenia nie powinien przekraczać poziomu, na którym rozpoczyna się rozwój wewnętrznych uszkodzeń w betonie. Na podstawie zachowania betonu pod obciążeniem w czasie badań przyjmuje się, że taka granica leży na poziomie powyżej 60% wytrzymałości średniej betonu. W aktualnej normie granica dopuszczalnych naprężeń jest określona wyrażeniem  $k_1 \cdot f_{ck}$ . Współczynnik  $k_1$  w Eurokodzie jest określony na bezpiecznym poziomie 0,6, podczas gdy polski załącznik krajowy zmienia jego wartość na 1,0. W konstrukcji sprężonej wydaje się jednak odpowiednie przyjmowanie ograniczenia naprężeń jak dla normy międzynarodowej.

Z uwagi na obciążenia długotrwałe stawia się dodatkowo ograniczenie związane z dynamiką procesu pełzania betonu. Według aktualnej wiedzy można założyć, że pełzanie betonu pod obciążeniem długotrwałym, powodującym naprężenie przekraczające poziom ok. 50% wytrzymałości średniej, nie jest liniowe. Wynikające z tych obserwacji ograniczenie polega na weryfikacji naprężeń pochodzących od obciążeń quasi-stałych z uwagi na ich granicę na poziomie  $k_2 \cdot f_{ck}$ , przy  $k_2 = 0,45$ . Po jej przekroczeniu pełzanie należy określać i obliczać jako nieliniowe.

### 2.3. Ograniczenia naprężeń dla stali sprężającej

Technologia produkcji stali sprężającej zapewnia obecnie jej wysoką wytrzymałość oraz wysoką granicę plastyczności. Obydwa parametry wytrzymałościowe są cechami o bardzo dużej regularności. Jednocześnie duże wartości sił sprężających oraz ich znaczenie dla nośności konstrukcji wymagają utworzenia wyraźnego bufora pomiędzy naprężeniami osiąganymi w ciągnach w trakcie zabiegów technologicznych a ich nośnością graniczną. Ponadto zależny od czasu proces relaksacji naprężeń, niezmiennie obecny w napiętych ciągnach sprężających, jest podstawą dla przyjęcia limitu naprężeń trwałych. Ak-

Tab. 1. Współczynniki do określenia reprezentatywnych wartości obciążeń

Oddziaływania	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_2$
Obciążenia użytkowe w budynkach			
Kategoria A: pomieszczenia mieszkalne	0,7	0,5	0,3
Kategoria B: pomieszczenia biurowe	0,7	0,5	0,3
Kategoria C: miejsca zebrań	0,7	0,7	0,6
Kategoria D: pomieszczenia handlowe	0,7	0,7	0,6
Kategoria E: magazyny	1,0	0,9	0,8
Obszary przeznaczone do ruchu pojazdów			
Kategoria F: ciężar pojazdu do 30 kN	0,7	0,7	0,6
Kategoria G: ciężar pojazdu od 30 kN do 160 kN	0,7	0,5	0,3
Kategoria H: dachy	0	0	0
Obciążenie budynków śniegiem			
Miejsca położone na wysokości $H > 1000$ m n.p.m.	0,7	0,5	0,2
Miejsca znajdujące się poniżej 1000 m n.p.m.	0,5	0,2	0
Obciążenie budynków wiatrem	0,6	0,2	0
Temperatura (nie dotyczy pożarów) w budynkach	0,6	0,5	0

tualne ograniczenia naprężeń według [1] mają postać następującą:

- dla naprężeń chwilowych w trakcie naciągu ciągną  $\sigma_{p0}$ :

$$\sigma_{p0,max} \leq 0,80 f_{pk} \text{ oraz}$$

$$\sigma_{p0,max} \leq 0,90 f_{p0,1k}$$

- dla naprężeń po zakończeniu naciągu ciągnien (po stratach doraźnych)  $\sigma_{pm0}$ :

$$\sigma_{pm0,max} \leq 0,75 f_{pk} \text{ oraz}$$

$$\sigma_{p0,max} \leq 0,85 f_{p0,1k}$$

W obecnym kształcie przepisów normowych nie stawia się formalnie ograniczenia naprężeń trwałych w ciągnach sprężających po wystąpieniu wszystkich strat. Jednocześnie, mimo aktualnego zaawansowania technologii produkcji stali sprężającej przeciąganej na zimno, nie da się wykluczyć istnienia w długim okresie czasu stałej tendencji tego materiału do relaksowania naprężeń poniżej określonego poziomu. Jak wynika z prac Bastgena [2], poziom naprężeń trwałych w stali sprężającej używanej w jego badaniach był zawsze niższy od 60% wytrzymałości charakterystycznej stali. W poprzednich przepisach normowych [3] w związku z tą tendencją i z uwzględnieniem dalszego rozwoju technologii materiału ograniczenie naprężeń trwałych w stali sprężającej przyjęto na poziomie 65% wytrzymałości. Wydaje się zasadne sprawdzać nadal ten warunek jako istotny dla długotrwałego bezpieczeństwa konstrukcji. A zatem dla naprężeń trwałych w ciągnach  $\sigma_{pmt}$  zaleca się, aby:

$$\sigma_{pmt,max} \leq 0,65 f_{pk}$$

### 3. Ograniczenie zarysowania

Zarysowanie elementu z betonu, będące skutkiem występowania naprężeń rozciągających wywołanych obciążeniami, jest jednym z istotnych ograniczeń dla wieloletniej trwałości konstrukcji. Jedną z metod zapobiegania zarysowaniu jest sprężenie konstrukcji. Zarówno w kierunku naprężeń wywołanych przez sprężenie, jak i w kierunkach pozostałych możliwość wystąpienia rys oraz ich szerokość jest poddawana weryfikacji.

Dla elementu prętowego można rozważać problem pojawienia się rys w kierunku prostopadłym do osi elementu (wywołanych zginaniem i siłą podłużną) oraz problem pojawienia się rys ukośnych

(wywołanych ścinaniem). Klasyczne podejście do projektowania elementów sprężonych każe wyodrębnić fazę pracy, w której beton podlega działaniu naprężeń rozciągających o wartości niższej od wytrzymałości na rozciąganie. Stan taki, nazywany dekompresją (zob. pkt 3.2), jest uważany za mniej korzystny w aspekcie długookresowej trwałości betonowego elementu sprężonego niż stan pełnego ściskania. Podejście takie przedstawia m.in. treść biuletynu CEB z 1985 r. „Cracking and Deformations” [4]. Sformułowana tam zasada dopuszcza ograniczoną szerokość rys w elementach użytkowanych w środowisku łagodnym zarówno pod częstą, jak i quasi-stałą kombinacją obciążeń. W środowisku o średniej agresywności ograniczona szerokość rys była dopuszczalna jedynie pod kombinacją częstą, natomiast dla kombinacji quasi-stałej stawiany był warunek dekompresji. Dla środowiska agresywnego wymagano dekompresji, a jedynie pod kombinacją rzadką ograniczona szerokość rys była dopuszczalna.

Obecne przepisy [1] formalnie podtrzymują zasadę, według której rysy w elementach sprężonych są dopuszczalne. Szczegółowe zalecenia w zakresie dopuszczalnej szerokości rys  $w_{max}$  pod kombinacją częstą obciążeń są przedstawione w tablicy 2.

Tab. 2. Zalecane wartości maksymalnej szerokości rys  $w_{max}$  dla elementów sprężonych

Klasa ekspozycji	Zalecane wartości $w_{max}$ [mm]
XO, XC1	0,2
XC2, XC3, XC4	0,2 <sup>1)</sup>
XD1, XD2, XS1, XS2, XS3	dekompresja

1) dla tych klas środowiska wymaga się dodatkowej weryfikacji warunku dekompresji przy quasi-stałej kombinacji obciążeń

Pełna weryfikacja warunku ograniczenia zarysowania wymaga w pierwszym etapie sprawdzenia, czy zachodzi zarysowanie. Jeżeli wynik takiego sprawdzenia jest negatywny, to kolejnym krokiem jest sprawdzenie, czy zachodzi dekompresja. W przeciwnym przypadku – jeżeli zarysowanie występuje – należy określić szerokość rysy.

### 3.1. Sprawdzenie warunku pojawienia się rys

Normy i zalecenia w zakresie konstrukcji sprężonych pozwalają na wykorzystanie zdolności betonu do przenoszenia naprężeń rozciągających. Stosowane zarówno dla fazy użytkowej, jak i dla etapu budowy konstrukcji warunki pojawienia się rys są formułowane dla trzech różnych przypadków obciążenia przekroju: czystego zginania, czystego rozciągania oraz rozciągania mimośrodowego w postaci:

$$M_{Ed} < M_{Cd} = W_{cs}(\sigma_{cp} + f_{ctm})$$

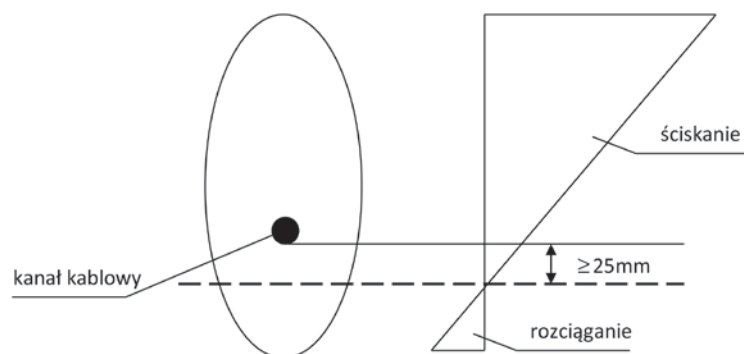
$$N_{Ed} < N_{Cd} = A_{cs}(\sigma_{cp} + f_{ctm})$$

$$N_{Ed} < N_{Cd} = \frac{(\sigma_{cp} + f_{ctm})}{\frac{e_0}{W_{cs}} + \frac{1}{A_{cs}}}$$

Warunki pojawienia się rys dla elementów sprężonych sprawdza się dla wartości sił wewnętrznych pochodzących od częstej kombinacji obciążeń. Zgodnie z omówioną powyżej zasadą, w razie spełnienia warunków pojawienia się rys konieczne może być sprawdzenie warunku dekompresji, w przeciwnym razie – warunku szerokości rysy.

### 3.2. Sprawdzenie warunku dekompresji

Tłumaczenie dosłowne terminu dekompresja oznacza redukcję naprężeń ściskających aż do całkowitego ich wyeliminowania. Warunek ten jest sprawdzany dla rozważanego przekroju poprzecznego.



Ryc. 1. Zasada weryfikacji warunku dekompresji

Sprawdzenie warunku polega na określe- niu dla częstej kombinacji obciążeń warto- ści i znaku naprężeń dla strefy o szeroko- ści 25 mm, otaczającej ciągną sprężającą i ich armaturę. Przy określe- niu naprężeń wykorzystuje się podstawowe zasady wy- trzymałości materiałów w zakresie liniowo sprężystym. Sposób sprawdzenia warunku został zilustrowany na rycinie 1.

### 3.3. Określenie szerokości rysy

Do określe- nia obliczeniowej szerokości rys  $w_k$  przyjmuje się formułę:

$$w_k = s_{r,max} \cdot (\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm})$$

Występujący w powyższym wzorze mak- symalny rozstaw rys zależy od średnicy i stopnia zbrojenia, grubości otulenia zbrojenia oraz kilku współczynników:

$$s_{r,max} = k_3 c + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \frac{\phi}{\rho_{p,eff}}$$

W obliczeniu stopnia zbrojenia strefy efektywnej przy rozciąganiu  $\rho_{p,eff}$  konieczne jest przede wszystkim określe- nie jej powierzchni  $A_{c,eff}$ , a następnie usta- lenie ilości zbrojenia  $A'_p$  i  $A_s$  objętego strefą. Strefa efektywna dla belek i płyt zajmuje całą szerokość przekroju, a jej wysokość liczoną od bardziej rozciąganej krawędzi przekroju  $h_{c,ef}$  można określać z wzorów:

$$h_{c,ef} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2,5(h-d) \\ (h-x)/3 \end{array} \right.$$

lub

$$h_{c,ef} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2,5(h-d) \\ h/2 \end{array} \right.$$

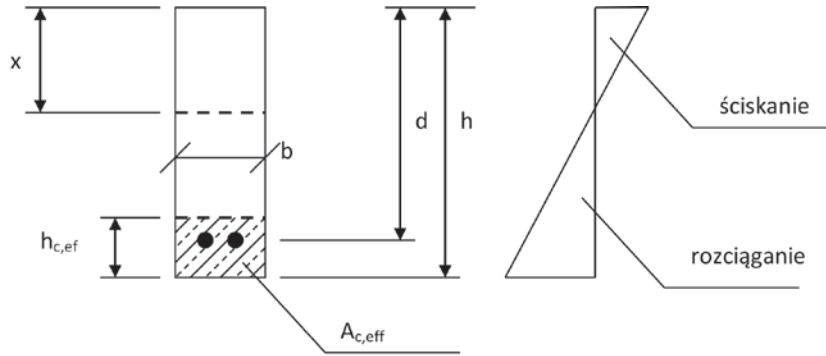
Wysokość użyteczną przekroju w prze- kroju, w którym występują różne rodzaje zbrojenia, można określić jako ważoną w sposób następujący:

$$d = \frac{A_s \cdot d_s + A_p \cdot d_p}{A_p + A_s}$$

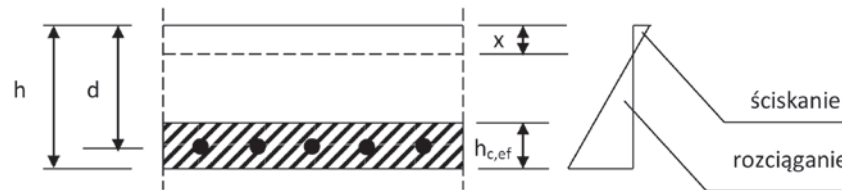
Z prawej strony na rycinach 2, 3 i 4 przedstawiono ilustrację sposobu określe- nia powierzchni efektywnej dla zginanego przekroju belkowego i płytowego oraz dla przekroju rozciąganego.

Stopień zbrojenia dla tak określonej strefy efektywnej przy rozciąganiu okre- śla się następująco:

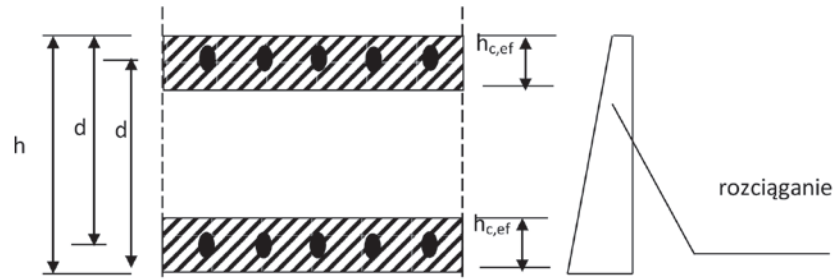
$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s + \xi_1^2 A'_p}{A_{c,eff}}$$



Ryc. 2. Określenie powierzchni efektywnej przy rozciąganiu dla belki zginanej



Ryc. 3. Określenie powierzchni efektywnej przy rozciąganiu dla płyty zginanej



Ryc. 4. Określenie powierzchni efektywnej przy rozciąganiu dla elementu rozciąganego

gdzie stosunek sił przyczepności  $\xi$  ma postać skorygowaną dla uwzględnienia obecności zbrojenia dwóch rodzajów:

$$\xi_1 = \sqrt{\xi \frac{\phi_s}{\phi_p}}$$

W tym wyrażeniu  $\xi$  jest stosunkiem sił przyczepności stali sprężającej i zbro- jeniowej według tablicy 3.

W przekroju, w którym występują pręty różnych średnic, średnica zbrojenia  $\phi$  wy-

stępująca we wzorze na średni końcowy rozstaw rys musi zostać zastąpiona przez wartość ważoną z uwagi na liczbę prętów różnych średnic  $n_1$  i  $n_2$  według wzoru:

$$\phi_{eq} = \frac{n_1 \phi_1^2 + n_2 \phi_2^2}{n_1 \phi_1 + n_2 \phi_2}$$

Pozostałe wielkości występujące w wy- rażeniu na  $s_{r,max}$  to:

- grubość otulenia  $c$ ;
- współczynnik zależny od przyczepno- ści zbrojenia  $k_1$ , równy 0,8 dla prętów

Tab. 3. Stosunek sił przyczepności cięgien i stali zbrojeniowej  $\xi$

Stal sprężająca	Wartość stosunku sił przyczepności $\xi$		
	Strunobeton	Kablobeton, ciągną z przyczepnością	
		$\leq C50/60$	$\geq C70/85$
Pręty gładkie i druty	Nie stosuje się	0,3	0,15
Sploty	0,6	0,5	0,25
Druty karbowane (nagniatane)	0,7	0,6	0,30
Pręty żebrowane	0,8	0,7	0,35

o dobrej przyczepności oraz 1,6 dla prętów o gładkiej powierzchni;

- współczynnik zależny od rozkładu odkształceń w przekroju  $k_2$ , równy 0,5 dla zginania i 1,0 dla czystego rozciągania, a dla rozciągania mimośrodowego określany z wzoru, w którym  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$ :

$$k_2 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_1}$$

- współczynniki przyjmowane za [1]  $k_3 = 3,4$  oraz  $k_4 = 0,425$

Konieczną dla określenia szerokości rysy różnicę odkształceń średnich pomiędzy stalą i betonem określa się następująco:

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_e \rho_{p,eff})}{E_s}$$

lecz nie mniej niż  $0,6 \frac{\sigma_s}{E_s}$

Naprężenie w zbrojeniu rozciągany  $\sigma_s$  należy określić jak dla przekroju zarysowanego, można też zastąpić wartością przyrostu naprężeń w cięgnach sprężających  $\Delta\sigma_p$  od stanu, w którym naprężenie w betonie na poziomie cięgnia wypadkowego jest zerowe. W obliczeniach stosowany może być wzór przybliżony:

$$\sigma_s = \Delta\sigma_p = \frac{1}{A_s + A_p} \left( \frac{M_s}{z} - P_{m,t} \right)$$

gdzie  $M_s$  to moment zginający z uwagi na oś zbrojenia rozciąganego od obciążeń odpowiadających kombinacji częstej i siły sprężającej  $P_{m,t}$ ,  $\alpha_e$  jest stosunkiem modułów sprężystości  $E_s / E_{cm}$ , a  $z$  jest ramieniem sił wewnętrznych, przyjmowanym z uproszczeniem jako równy  $0,9d$ .

Obliczanie szerokości rysy w przekrojach sprężonych nie należy do typowych przypadków projektowych, bo znacznie częściej celem projektowania jest zapewnienie całkowitego ściskania przekroju. Należy jednak pamiętać, że element konstrukcyjny, który w jednym kierunku jest poddany ściskaniu na skutek działania sił sprężających, w innych kierunkach może się zachowywać jak klasyczny element żelbetowy poddany rozciąganiu i zarysowaniu. Trwałość takiego elementu musi być zatem szacowana dla mniej korzystnego z przypadków wyteżenia.

#### 4. Ugięcia elementów sprężonych

Obliczenia ugięć i wygięć elementów z betonu sprężonego powinny, podob-

nie jak dla innych elementów konstrukcyjnych z betonu, uwzględniać wiele czynników. Warunki wykorzystywane dla obliczenia ugięć poza działaniem obciążeń grawitacyjnych muszą obejmować również wpływ sił sprężających. Siły te działają w kierunku podłużnym, powodując ściskanie i skrócenie elementu, oraz w poprzecznym – prowadząc do jego zakrzywienia, a w konsekwencji do ugięć. Kształt trasy cięgną, zmienność sił sprężających na skutek zjawisk reologicznych oraz na długości kabla sprawia, że wpływ sprężenia na odkształcenia elementu nie jest stały na długości i nie jest stabilny w czasie. Z uwagi na powyższe, zmienne parametry analiza powinna obejmować zarówno uwzględnienie poszczególnych parametrów, jak i weryfikację istotnych warunków:

- rozkład i wartości obciążenia,
- rozpiętość i warunki podparcia / utwierdzenia elementu,
- zmienność siły sprężającej na długości elementu,
- przebieg trasy wypadkowego cięgną sprężającego i zgodność geometrii tras cięgną z projektem; rzeczywisty przebieg sprężenia w elemencie może nie być zgodny z przebiegiem przybliżonej trasy parabolicznej, co będzie miało wpływ na sposób obliczenia odkształceń i ugięć,
- warunek ograniczenia naprężeń trwałych w betonie; naprężenia przekraczające zakres liniowych odkształceń w konsekwencji prowadzą do znacznego wzrostu ugięcia,
- rzeczywista wartość modułu sprężystości betonu oraz odpowiednio dobrana jego wartość zastępcza, oparta na współczynniku pełzania dla przypadków obciążenia długotrwałego; ugięcie elementu jest silnie zależne od rzeczywistej wartości modułu sprężystości betonu, podczas gdy w przybliżonych obliczeniach często stosuje się wartość odczytaną z normy,
- warunek zarysowania; ugięcie elementu sprężonego może znacznie wzrosnąć wskutek pojawienia się rys.

Większość elementów sprężonych zaprojektowanych jest w taki sposób, że pod wpływem przewidywanego obciążenia nie zachodzi w nich zarysowanie. Z uwagi na istotną różnicę pomiędzy sposobami określenia strzałki ugięcia rozróżnia się sposób określenia ugięć niezarysowanych elementów sprężonych oraz sposób okre-

ślenia ugięć zarysowanych elementów sprężonych.

Podstawową zależnością dla obliczenia ugięć elementów zginanych jest zależność Mohra:

$$\rho(x) = \frac{M(x)}{EI(x)}$$

gdzie  $\rho(x)$  jest lokalną wartością krzywizny elementu,  $I(x)$  jest wartością lokalną momentu zginającego,  $E$  – modułem sprężystości materiału, a  $M(x)$  – momentem bezwładności przekroju. Uwzględniając zależność, według której krzywizna jest jednostkową zmianą kąta nachylenia stycznej do linii ugięcia, różnicę kąta nachylenia między przekrojami  $i$  i  $j$  elementu zginanego można wyrazić jako pole powierzchni wykresu wartości  $M(x)/EI(x)$  pomiędzy tymi przekrojami:

$$\alpha_{i,j} = \int_{x_i}^{x_j} \frac{M(x)}{EI(x)} dx$$

Wielkość ugięcia punktu  $j$  względem punktu  $i$  jest równa wartości momentu statycznego powierzchni pod wykresem  $M(x)/EI(x)$  na odcinku między rozważanymi przekrojami względem punktu  $j$ , czyli:

$$a_{i,j} = \int_{x_i}^{x_j} x \frac{M(x)}{EI(x)} dx$$

Tak wyrażone zależności mają zastosowanie dla elementów sprężonych. W każdym przypadku obliczenia ugięć rzeczywistych elementów o złożonej geometrii, skomplikowanym układzie sprężenia oraz zaawansowanej technologii budowy wymagają odpowiedniego aparatu obliczeniowego, znacznie bardziej zaawansowanego niż wzory normowe.

#### 4.1. Ugięcia niezarysowanych elementów sprężonych

Ugięcia elementów sprężonych z betonu przeważnie oblicza się jak dla elementów niezarysowanych. Zważywszy na powyższe zależności pomiędzy momentem zginającym i krzywizną, można obliczenia ugięć wykonać, stosując zasadę superpozycji.

W celu uproszczenia obliczeń w zwykłych przypadkach określa się szereg typowych przypadków obciążeń i sposobów podparcia. Ugięcie betonowego elementu sprężonego określa się przy założeniach upraszczających:

- moduł sprężystości betonu ma ustaloną, stałą wartość dla całego elementu,

- rozkład obciążeń grawitacyjnych oraz obciążenia sprężeniem odpowiada jednemu z typowych wykresów podstawowych (równomiernie rozłożone, punktowe, paraboliczne),
- moment bezwładności przekroju odpowiada rzeczywistemu etapowi pracy,
- element sprężony nie podlega zarysowaniu,
- obliczenia ugięcia pod obciążeniem długotrwałym prowadzi się przy założeniu wpływu procesu pełzania, jak dla przypadku pełzania prostego.

Obliczenia ugięć pod obciążeniem krótkotrwałym wykonuje się według rozwiązań przyjętych dla typowych przykładów belek, a ich formułą podstawową jest:

$$a = c \frac{ql^4}{E_{cm}(t)I}$$

lub

$$a = c \frac{Ql^3}{E_{cm}(t)I}$$

gdzie  $q$  oraz  $Q$  są wartością obciążenia (równomiernego lub skupionego, odpowiednio),  $l$  – rozpiętością teoretyczną,  $E_{cm}(t)$  – modułem sprężystości betonu w chwili ( $t$ ), a  $I$  – momentem bezwładności przekroju. Współczynnik  $c$  zależy od schematu podparcia i rozkładu obciążenia.

W praktyce obliczeniowej częściej stosuje się wyrażenie zależne od wartości maksymalnego momentu zginającego w przęśle w postaci:

$$a = k \frac{Ml^2}{E_{cm}(t)I}$$

Analogicznie do wzorów zależnych od obciążenia, współczynniki  $k$  jako wyniki rozwiązania równania ugięcia belki zginanej przyjmują wartości zależne od schematu podparcia i schematu obciążenia. Wartości współczynnika podawane są w wielu podręcznikach i tablicach.

Ugięcia elementów sprężonych pod obciążeniem długotrwałym są łącznym efektem ugięcia sprężystego i wpływu zjawiska pełzania betonu. Ich wartość określa się na podstawie skorygowanej, fikcyjnej wartości modułu sprężystości betonu, nazywanego modułem efektywnym:

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \phi(t, t_0)}$$

Strzałkę ugięcia elementu prętowego określa się wówczas z wzoru:

$$a = \alpha \frac{Ml^2}{E_{c,eff}I}$$

Standardowym wymaganiam przepisów normowych jest określenie ugięcia elementu pod obciążeniem długotrwałym (quasi-stałym). Przy oznaczeniu momentu zginającego od równomiernie rozłożonych obciążeń długotrwałych (ciężar konstrukcji i jej wykończenia / trwałego wyposażenia) przez  $M_{g+\Delta g}$  oraz parametrów sprężenia: siły sprężającej przez  $P_d$  oraz jej mimośrodowość przez  $z_{cp}$  wzór na ugięcie swobodnie podpartego, niezarysowanego elementu sprężonego przyjmuje postać:

- przy parabolicznej trasie cięgna wypadkowego i zerowych mimośrodkach na podporach

$$a = \frac{5 M_{g+\Delta g} l^2}{48 E_{c,eff} I} - \frac{5 P_d z_{cp} l^2}{48 E_{c,eff} I}$$

- przy prostoliniowej trasie cięgna i stałym mimośrodkie

$$a = \frac{5 M_{g+\Delta g} l^2}{48 E_{c,eff} I} - \frac{1 P_d z_{cp} l^2}{8 E_{c,eff} I}$$

- przy parabolicznej trasie i mimośrodkach na podporach (dodatnia wartość odmierzana w górę od osi obojętnej)

$$a = \frac{5 M_{g+\Delta g} l^2}{48 E_{c,eff} I} - \frac{5 P_d l^2}{48 E_{c,eff} I} \left( z_{cp} - \frac{z_{c0}}{2} \right)$$

Dla określenia strzałki chwilowego ugięcia pod obciążeniem maksymalnym do wartości określonych według powyższych wzorów dodaje się ugięcie od odpowiednio rozłożonego obciążenia dodatkowego:

- dla obciążenia równomiernie rozłożonego

$$a = \frac{5 M_q l^2}{48 E_{cm}(t)I}$$

- dla obciążenia o dowolnym schemacie

$$a = \alpha \frac{M_q l^2}{E_{cm}(t)I}$$

gdzie  $k$  jest współczynnikiem określanym wg zasad opisanych powyżej.

#### 4.2. Ugięcia zarysowanych elementów sprężonych

Elementy zginane, które pracują jako zarysowane, najczęściej przechodzą do fazy drugiej jedynie na części swojej długości. Wówczas ich odkształcenia można określać jako pośrednie pomiędzy występującymi w fazach zarysowanej oraz niezarysowanej. Norma [1] proponuje w tym celu wyrażenie:

$$\alpha = \xi \alpha_{II} + (1 - \xi) \alpha_I$$

W powyższym wyrażeniu  $\alpha$  jest parametrem rozważanej deformacji. W uproszczeniu można przyjąć, że  $\alpha$  jest ugięciem.  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  są wartościami rozważanego parametru przy założeniu braku rys i pełnego zarysowania, odpowiednio. Parametr  $\xi$  jest współczynnikiem dystrybucji, którego zadaniem jest uwzględnienie *tension stiffening*, usztywnienia przekroju wskutek współpracy na rozciąganie betonu między rysami. Jego wartość określa się następująco:

$$\xi = 1 - \beta \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2$$

W przekrojach niezarysowanych  $\xi$  wynosi 1,0 dla obciążenia pojedynczego, krótkotrwałego oraz 0,5 dla obciążenia długotrwałego i wielokrotnie powtarzalnego.  $\sigma_s$  jest naprężeniem w zbrojeniu rozciągającym, obliczonym dla przekroju zarysowanego i pełnego obciążenia, a  $\sigma_{sr}$  jest naprężeniem w zbrojeniu rozciągającym w przekroju zarysowanym pod obciążeniem powodującym zarysowanie. Stosunek  $\sigma_{sr}/\sigma_s$  dla przypadków czystego zginania i czystego rozciągania można zastąpić proporcją  $M_{cd}/M$  lub  $N_{cd}/N$ , odpowiednio.

Obliczenie prawdopodobnej wartości ugięcia elementu w oparciu o podane wyżej wyrażenie dla wartości można wykonać na podstawie obliczeń numerycznych ugięcia elementu dla przekroju w pełni zarysowanego i przekroju niezarysowanego. Takie podejście powinno jednak nadal uwzględniać w sposób możliwie dokładny inne parametry wpływające na wielkość ugięcia, jak moduł sprężystości betonu, wielkość współczynnika pełzania oraz wszystkie dane dotyczące geometrii elementu i cięgna.

#### Literatura

- [1] Eurokod 2 – PN-EN 1992-1-1; PN-EN 1992-1-2.
- [2] BASTGEN K.J. *Übersicht über die Verfahren zur Berechnung des Relaxationsverhaltens des Betons aus dem Kriechverhalten des Betons, Beton- und Stahlbetonbau*. Berlin 1977, S. 179–185.
- [3] Norma PN-B-03264:2002 *Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone, obliczenia statyczne i projektowanie*.
- [4] Manual „Cracking and Deformations”, CEB, Lausanne, 1985.

